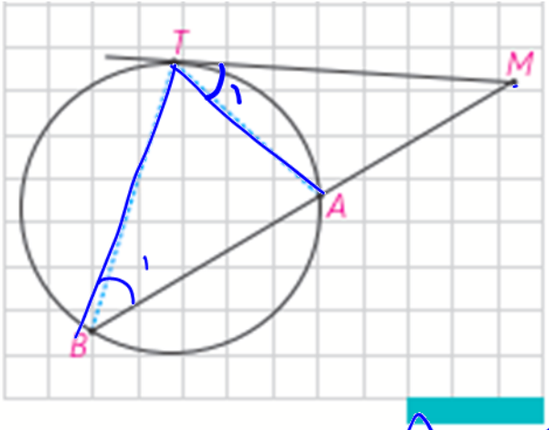
قضیه: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع



فرض: MT مماس ، MB قاطع

حکم: $MT^2 = MA \times MB$

T را به A و B وصل می‌کنیم

زاویه محاطی $\hat{B} = \hat{T}_1 = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2}$

زاویه ظلی

$\hat{M} = \hat{M}$

$\triangle TAM \sim \triangle TMB \xrightarrow{\text{زز}} \frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}$

$\longrightarrow MT^2 = MA \times MB$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

- دو دایره به شعاع‌های ۳و۲ مفروض‌اند. در حالت‌های زیر وضعیت دو دایره را بیان کنید.

الف) فاصله دو مرکز دایره ۵

$5 = 3 + 2 \Rightarrow OO' = R + R'$

دایره مماس خارج

ب) فاصله دو مرکز دایره ۱/۵

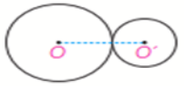
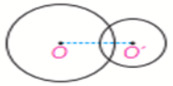
$R + R' = 5 \ , \ R - R' = 1$

$1 < 1{,}5 < 5$

$R - R' < OO' < R + R' \Longrightarrow$ متقاطع

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ درنظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است :

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = 0$	

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

هر خطی یا پاره‌خطی که بر هردو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره است. اگر دو دایره در یک طرفِ خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی، و اگر دو دایره در دو طرف خط باشند آن را مماس مشترک داخلی می‌نامند.

$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$

با استفاده از دستور محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = 2\sqrt{RR'}$

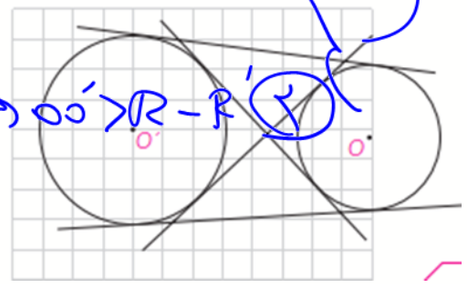
$R - R' < OO' < R + R'$

① $R + R' > OO'$

$OO' + R' > R \rightarrow OO' > R - R'$

۲۷

۲۷



طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱و۳ سانتی‌متر برابر $3\sqrt{33}$ سانتی‌متر است. کمترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

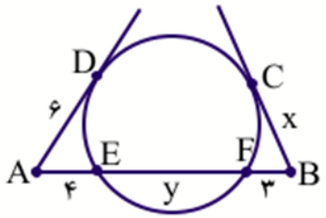
$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 9 \times 33 = d^2 - (11 - 3)^2$

$297 + 64 = d^2 \rightarrow d^2 = 361 \rightarrow d = 19$

$OO' - (R + R') = 19 - (14) = 5$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

در شکل زیر مقدار x کدام است؟



$BC^2 = BF \times BE \Rightarrow x^2 = 3(3+\cancel{y})$

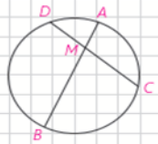
$AD^2 = AE \times AF \Rightarrow \cancel{36} = \cancel{4}(4+y)$

$y = 5$

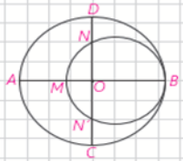
$x = 2\sqrt{6}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تمرین

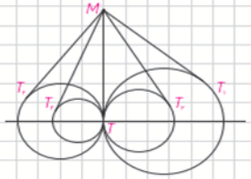


۱ــ در دایرهٔ C(O,R) وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر AB = ۱۱cm، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



۲ــ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و BC = ۲۰. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.

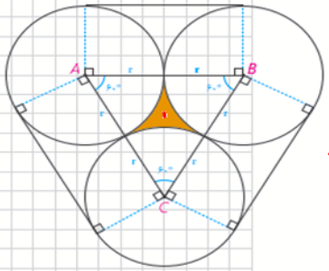
۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر AM = ۱۶ و ND = ۱۰، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$

۵ــ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.



۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ است.

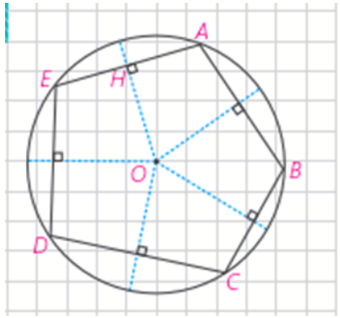
۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها 16π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.

۸ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

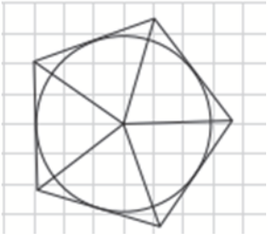
پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند.

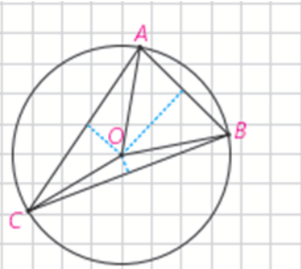


بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.



دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

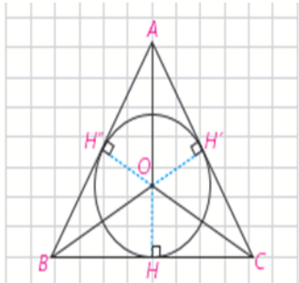
قبلاً همرسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه همرسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.



OA=OB=OC=R

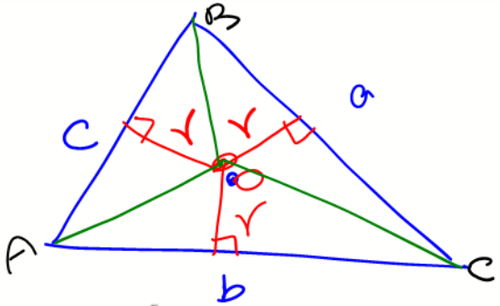
همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث همرس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه همرسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز S=pr که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.



OH=OH′=OH″=r

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز



$r = \frac{S}{P}$

خرمی | O مرکز دایره محاطی r

$r = \frac{S}{P}$

در هر مثلث با مساحت S و محیط $2P$ شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید $S = rP$.

$S_{ABC} = S_{BAO} + S_{ACO} + S_{BOC} \Rightarrow S = \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}ra = \frac{1}{2}r(\underbrace{a+b+c}_{2P}) \Rightarrow S = rP$

اگر مساحت مثلث ABC را با S و محیط آن $2P$ باشد ثابت کنید $r_a = \frac{S}{P-a}$.

۵ـ اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

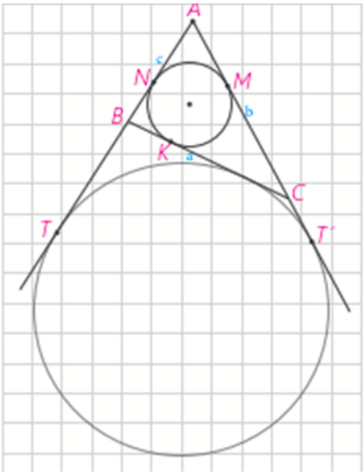
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۶ـ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N، M و K باشند و T و T′ نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :

AM=AN=P−a

BN=BK=P−b, CM=CK=P−c

AT=AT′=P



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

شعاع دایره محیطی و محاطی داخلی وخارجی مثلث با اضلاع زیر را بدست آورید. **۵و۶و۷**

$\frac{a+b+c}{2} = p = 9$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$=\sqrt{9(4)(3)(2)} = 6\sqrt{6}$

$2R = \frac{a}{\sin A}$

$R = \frac{a}{2}$

$R = \frac{abc}{4S}$

$2R = \frac{a}{\sin A}$

$r = \frac{S}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9}$

$r_5 = \frac{S}{p-5} = \frac{6\sqrt{6}}{4}$

$r_6 = \frac{S}{p-6} = \frac{6\sqrt{6}}{3}$

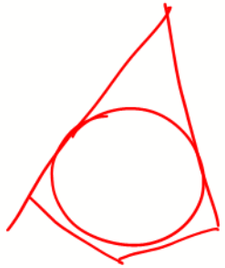
$r_7 = \frac{S}{p-7} = \frac{6\sqrt{6}}{2}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.



۲ـ فرض کنید : AB+CD=BC+AD.

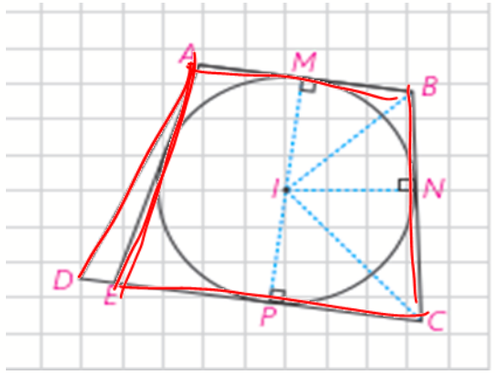
I روی نیمساز

نیمسازهای دو زاویهٔ B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطهٔ I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟(IM=IN=IP) چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟ حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود. پس، AB+EC=AE+BC ؛ (چرا؟) از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می‌گیرید : AD=DE+AE ؟

AD = AE + DE ✗

این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟) پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.



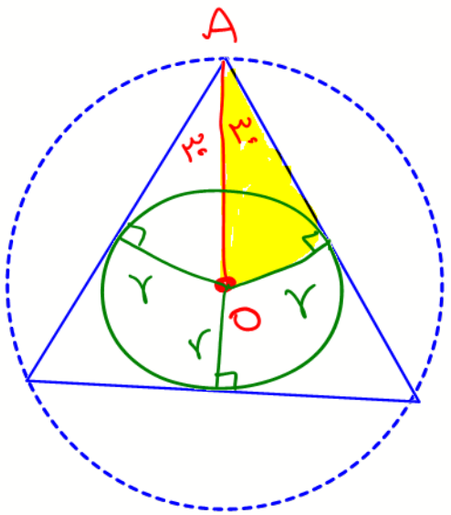
پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

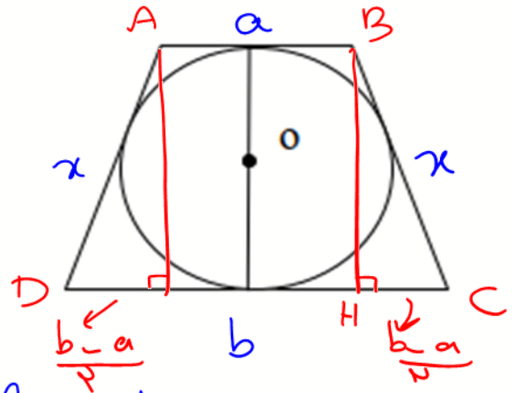
	مربع	مستطیل	لوزی	متوازی‌الاضلاع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین	کایت
محاطی	✓	✓	...	...	...	✓	...
محیطی	✓	...	✓	...	...	...	✓



$OA = R = 2r$

$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز



۴ــ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

ذوزنقه متساوی الساقینی بر دایره محیط است.اگر قاعده های ذوزنقه ۵و۹ باشد

مساحت ذوزنقه و ارتفاع آن کدام است ؟

محاطی و محیطی $\Longrightarrow 2x = a+b$

$BH^2 + HC^2 = BC^2 \Longrightarrow BH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab$

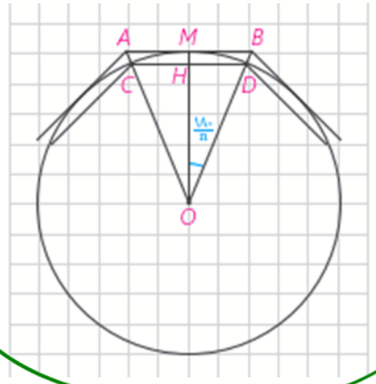
$BH = \sqrt{ab}$, $S_{\text{ذوزنقه}} = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\sqrt{ab}\right)$

$S = \left(\frac{5+9}{2}\right)\sqrt{5\times 9}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند.

نشان می‌دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است :



۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = 2r\tan\frac{180^\circ}{n}$ و $CD = 2r\sin\frac{180^\circ}{n}$.

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تمرین

۱ــ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲ــ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

۳ــ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

در مثلث ABC ، $B = ۷۰$ ، $A = ۸۰$ عمودمنصف AB و نیمساز زاویه داخلی C را رسم می کنیم تا همدیگر در نقطه M قطع کنند زاویه $M\hat{A}B$ کدام است ؟

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز